Braunschweigische
Wissenschaftliche Gesellschaft

Jahrbuch 2015

Sonderdruck
Seiten 47–72

J. Cramer Verlag · Braunschweig
2016

Modelle in Praxis und Wissenschaft*

UDO PEIL

Institut für Stahlbau, Beethovenstraße 15, D-38106 Braunschweig
E-Mail: U.Peil@tu-bs.de

1. Einführung

Das Entwickeln von Modellen wird in den Natur- und Ingenieurwissenschaften im Wesentlichen aus zwei Gründen vorangetrieben. Modelle werden benötigt, um

a. Prognosen einer Entwicklung oder eines Verhaltens zu ermöglichen.
b. um nicht direkt sichtbare Bereiche über ein Modell verständlich zu machen, d.h. mit Hilfe eines Modells in eine geschlossene Box zu schauen, von der nur Reaktionen auf gewisse Einwirkungen bekannt sind.

Modellentwicklung ist in einer großen Zahl von Disziplinen eine der Hauptbeschäftigungen. Dabei ist überhaupt nicht klar, ob das im Einzelfall überhaupt zulässig oder möglich ist.

Der Begriff Modell wird in der Umgangssprache mehrdeutig verwendet. In diesem Beitrag wird versucht, eine gewisse Systematisierung durchzuführen, Dabei werden aus Gründen der Anschauung gelegentlich spezielle Modelle vorgestellt. Etwas mehr im Detail wird im Anschluss auf Modell eingegangen die dem Bereich der Ingenieurwissenschaften – dort der Mechanik – zuzuordnen wären.

2. Was ist ein Modell

Der etymologische Hintergrund des Wortes Modell ist im italienischen Wort *modello* zu suchen, das dem lateinischen Wort *modulus* entstammt. Der *modulus* war eine Maßgröße in der Baukunst. Wir finden das Wort als Modul heute noch im Deutschen wieder.

---

* Der Vortrag wurde am 13.03.2015 vor der Plenarversammlung der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft gehalten.

Welche typischen Eigenschaften hat ein Modell ? Es dient dazu

a. Ein Beispiel zu geben. Dies wird deutlich durch die sog. Modelle oder models, die neue Kleidung bei Modeveranstaltungen vorführen.

b. Etwas zu erklären. Wie z.B. beim Spielmodell einer Dampfmaschine, früher beliebtes Weihnachtsgeschenk für Jungen.

   Im Mittelalter war es aus diesem Grunde üblich, z.T. begehbare Modelle in verkleinerndem Maßstab von Kirchenbauwerken zu erstellen. Zeichnungen lesen und interpretieren konnten nur Wenige. Ein Modell dagegen erlaubte die Bewertung des Gesamten, die Raumwirkung etc.

   Man war der Ansicht, dass, wenn das Modell standsicher ist, auch das endgültige Bauwerk standsicher sein müsste, da ja alle Maße proportional vergrößert wurden. Dies war eine bemerkenswerte Fehleinschätzung, wohl auch die Ursache für viele Einstürze von Kirchenbauten. Die einwirkenden Lasten des Bauwerkes steigen mit dem Volumen, also der 3. Potenz, die Widerstände, z.B. die Flächen der Pfeiler aber nur mit der 2. Potenz, so dass das endgültige Bauwerk bei einem Maßstab 1:n um den Faktor n überlastet wurde.

c. Komplexe Zusammenhänge auch ohne Kenntnis der Ursachen prognostizieren zu können. Wer den Wechsel von Ebbe und Flut vorhersagen kann, kann sich darauf einrichten und passend handeln.

   Die Macht der Pharaonen in Ägypten beruhte zum Teil darauf, dass Sie die Nilhochwässer richtig vorhersagen konnten. Das verlieh den Pharaonen in den Augen der Bevölkerung etwas Gottähnliches. Ursache der Nilhochwässer sind die Monsunregen, die Ende Mai regelmäßig in Äthiopien niedergehen. Solche Prognosen erforderte die Fähigkeit mit großen Zahlen arbeiten zu können. Das erledigten zumeist „Hirne“ im Hintergrund, welche dafür gut bezahlt wurden. Im Fehlerfalle konnte es aber auch den Kopf kosten.

d. Einen komplexen Zusammenhang zu vereinfachen. Eine Sternkarte als Modell des gestirnten Himmels vereinfacht die unüberschaubare Menge der Gestirne auf einige, leicht zu identifizierende Sternbilder (großer Wagen, Orion, Cassiopeia etc.).

   Eine Straßenkarte vereinfacht und reduziert die Informationen auf wesentliche Punkte, wie z.B. Straßenverbindung, Ortschaften, besondere topographische Elemente. Ein Eintragen aller Informationen würde die Nutzung einer Straßenkarte als nicht sinnvoll erscheinen lassen. Im Grenzfall müsste sie im Maßstab 1:1. angefertigt werden, was bedeutet, dass man für das Studium der Straßen karte die gleiche Zeit benötigte, wie für das reale Straßennetz.

Während wir leben, agieren und reagieren, setzen wir unbewusst fortwährend Modelle ein (auch optische und akustische). Das Gehirn fasst auf diese Weise die Billionen von Eindrücken die auf uns einprallen, so zusammen, dass die Menge erfassbar und begreifbar wird:

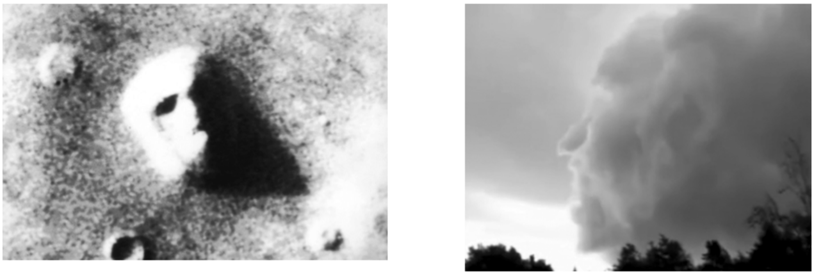


Abb. 1: Mustererkennung durch Pareidolgie.

Ncah eienr Stidue der Cmabridge Uinverstiaet, ist es eagl in wlehcer Reiehnfogle die Bchustebaen in Woeretrn vokrmomen.

Es ist nur withcig, dsas der ertse und lettze Bchusatbe an der ricthgien Stlele ist. Der Rset knan total falcsh sein und man knan es onhe Porbelme leesn.

Das ist, wiel das mneschilche Geihrn nciht jeden Bhustaen liset, sodnern das Wrod als gaznes. Krsas oedr?

Das Gehirn sucht ständig Muster um die riesige Zahl der Sinnesreize zu reduzieren. Das Gehirn ist eine Hypothesengenerator: Entwerfen und prüfen oder verwerfen. Dazu nutzt es Modelle, die die Hypothesen erfüllen. Beispiel: Das sog. Marsgesicht und Wolkenbilder (Abbildung 1):

Das Wort Pareidologie (von griechisch *para*, „daneben, daran vorbei“, und *eidos „Aussehen, Gestalt, Form*“, eidolon „Bild, Abbild, Gestalt“. Später wird eidolon latinisiert zu idola, vgl. z.B. Idol. Deshalb nennt man ein fotografisches Gedächtnis, auch eidetisches Gedächtnis.

Es ist hierbei einfach zu erkennen, wie das Gehirn die komplexen Strukturen zu bekannten Modellstrukturen vereinfacht.

Dabei hängt eine Wiedererkennung eines Musters von den gespeicherten Erinnerungen und Erfahrungen ab. Deshalb wirkt sich eine Erwartung auch auf die Wahrnehmung eines Musters aus, d.h. die Wahrnehmung wird durch Kommunikation und Erwartung beeinflusst und somit manipulierbar.

Das ist der Tummelplatz für optische oder akustische Täuschungen. So macht das Gehirn aus perspektiv gezeichneten 2-dimensionalen Figuren 3-dimensionale (Abbildung 2):

Dies führt aber Probleme, wenn die Modelle zumindest im lokalen den 3-dimensionalen widersprechen (Abbildung 3):

Diese Effekte nutzt der Künstler Escher aus, hier z.B. mit der Treppe, die stetig ansteigt, aber sich dennoch schließt. Ähnliche Bilder gibt es auch mit einer Wasserrinnen, die sich stetig neigt, so dass Wasser fließt, die aber dennoch geschlossen ist.

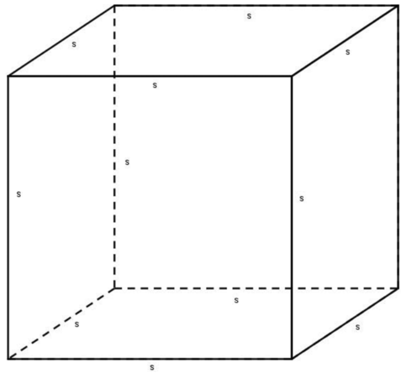


Abb. 2: 2-dimensionale Darstellung wird als 3-dimensionaler Würfel wahrgenommen.

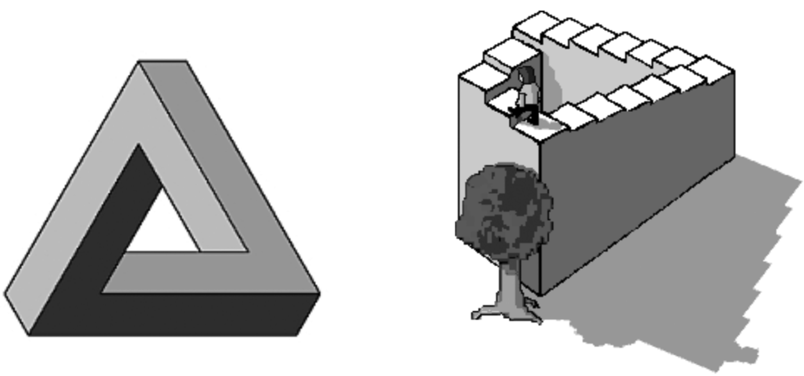


Abb. 3: 2-diemsionale Modelle mit Widersprüchen.

Der Begriff Modell wird in der Philosophie sehr spezialisiert genutzt. Dem historischen Wörterbuch der Philosophie [1] entnimmt man:

Modell heißt in der Logik ein System aus Bereichen und Begriffen, insofern es die Axiome einer passend formulierten Theorie erfüllt.

Diese Definition wird nahezu analog in die Mathematik übernommen. Dort wird definiert:

Wenn Σ eine Menge von L-Sätzen ist; heißt eine L-Struktur, die jeden Satz in Σ wahr macht, ein Modell von Σ.

Die Existenz eines solchen Modells beweist, dass sich die Axiome nicht widersprechen.

Dies ist eine sehr spezielle Definition, die sich nicht allgemein auf andere Bereiche übertragen lässt. Im Folgenden werden Bedingungen definiert, die ein Modell erfüllen muss, um als solches bezeichnet werden zu können. Dies wird dann an verschiedenen Beispielen aus unterschiedlichen Fachbereichen erläutert.

3. Was ist ein Modell – Definition und Anforderungen

3.1 Definition

I. **Ähnlichkeit:** Ein Modell hat mit dem Original mindestens eine Eigenschaft gemeinsam. Das Modell muss dem Prototyp insofern bis zu einem gewissen Grad ähnlich sein, es soll die realen Sachverhalte zumindest approximativ wiedergeben.

II. **Abstraktion**: Jede sinnvolle Modellbildung beinhaltet eine Abstraktion. Bei dieser Abstraktion gehen bestimmte Eigenschaften des Originals verloren, d.h. nicht alle Merkmale des Objekts können (oder sollen) auf das Modell übertragen werden.

III. **Beziehungen**: In jedem Modell müssen Aussagen enthalten sein, welche die Beziehung des Bildes (= Modell) zu seinem Original regeln oder die Konstruktion des Modells erst ermöglichen, z.B. in seiner Formulierung als mathematisches Modell. Dies sind z.B. Anfangs- oder Randbedingungen.

3.2 Grundanforderungen an Modelle

3.2.1 Falsifizierbarkeit

Der österreichisch-englische Wissenschaftsphilosoph Karl Popper (1902-1994) fordert, dass Modelle stets verifiziert oder besser falsifisiert werden können.

Verifikation ist der Nachweis, dass ein vermuteter oder behaupteter Sachverhalt wahr ist. Falsifikation, dass er falsch ist. In der Regel können Modelle nicht verifiziert, sondern nur validiert werden, d.h. die Modelle können nur auf ihre zutreffenden Ergebnisse beim Einsatz geprüft werden, die Richtigkeit kann nur beispielhaft getestet werden.

Besser als eine Verifizierung ist die Falsifizierung, da Modellentwickler bei einer Verifizierung oft die nicht so gut passenden Ergebnisse geringer bewerten, als die positiven. Hierzu hat Popper ein einleuchtendes Beispiel geliefert:

Hypothese: Alle Schwäne sind weiß! Soll veri- oder falsifiziert werden.

In der Wissenschaft wird man versuchen, die Hypothese zu beweisen und/oder den Beweis aus Beobachtungen herzuleiten. Letzteres ist logisch nicht erlaubt, da dazu von Einzelfällen auf eine allgemeine Regel geschlossen werden müsste.

Aber nur ein einziger schwarzer Schwan, der irgendwo auf der Welt entdeckt wird, erlaubt den logischen Schluss, dass die Hypothese, dass alle Schwäne weiß seien, falsch ist.

Die Falsifikation ist insofern formal einfacher, sie strebt nach dem Hinterfragen nicht nach einem Beweis. Die Falsifikation ist schärfer als die Verifikation. Hinzu kommt das menschliche Problem, dass der Modellersteller stärker nach Nachweisen suchen wird, die sein Modell stärken, nicht nach solchen, die es widerlegen.

Modelle die weder falsifi- noch verifiziert werden können, sind nichts wert, sie sollten schleunigst als wissenschaftlicher Sondermüll entsorgt werden. Dies trifft z.B. auf die heute stark in die Politik eingreifenden Klimamodelle zu. Zur Zeit – also im Moment des Gebrauches – sind sie weder falsi- noch verifizierbar. Dazu bedarf es sehr langer Zeiträume, also etwa 5.000 oder 10.000 Jahre, die sind aber bei Anwendung noch nicht verstrichen, so dass die Modelle nicht einmal validiert werden können. Es wird zwar versucht, durch Rückrechnen aus der Vergangenheit den heutigen Klimazustand zu bestimmen. Dies ist aber fast nicht möglich, da die Anfangsbedingungen nicht alle oder nur sehr ungenau bekannt sind. Da die Modelle auf hochgradig nichtlinearen Differentialgleichungen basieren, führen solche Rechnungen oft ins Chaos, da bereits kleinste Abweichungen in den Anfangsbedingungen zu völlig anderen Ergebnissen führen (vgl. den berühmten Schmetterling im Central Park, der durch seine minimalen Luftbewegungen zu einem Orkan im Süden Amerikas führt).

3.2.2 Reduzierbarkeit

Eine weitere wichtige Frage bei der Entwicklung und Anwendungen von Modellen, ist die Frage: Sind die Probleme die durch das Modell behandelt werden sollen, überhaupt reduzibel? Diese Eigenschaft wird i.a. axiomatisch vorausgesetzt, ohne dass ein Nachweis erfolgt oder erfolgen kann. D.h. die Annahme der Reduzierbarkeit des Problems ist nur ein Glaubenssatz aber kein Axiom d.h. keine Wahrheit!

Durch Reduzieren lassen sich viele Probleme auf wenige zurückführen, so dass die Berechnung schnell geht, d.h. schneller als die Wirklichkeit, d.h. eine Prognose ist möglich (vgl. dazu das Beispiel der Straßenkarte im Maßstab 1:1, Abs. 2).

Wie gerade erwähnt, wissen wir aus der Chaos-Theorie, dass noch so kleinste Änderungen der Anfangsbedingungen einen riesigen Einfluss haben können. Im Grenzfall müsste selbst ein Elektron am Rande es Universums betrachtet werden!

Hinzu kommt der Einfluss des Messenden auf das System (Beobachterproblem): Jede Messung in einer elektrischen Schaltung verändert diese, da zusätzliche Widerstände o.ä. eingefügt werden. Diese verändern die Schaltung. Gleiches gilt auch für Messungen an anderen Systemen.

Ergo: Viele Systeme sind vermutlich nicht reduzibel.

Es besteht also die Gefahr, dass mit riesigem Aufwand etwas berechnet wird, was überhaupt nicht berechenbar ist. Eine Nicht-Reduktion bringt keinen Vorteil, da die Berechnung genau so lange bräuchte wie die Realität. (vgl. Straßenkarte 1:1).

Die Lösung des Problems erinnert an den sog. Laplaceschen Dämon. Dieser ist die Veranschaulichung der Auffassung, nach der es im Sinne der Vorstellung eines geschlossenen mathematischen Weltgleichungssystems möglich ist, unter der Kenntnis sämtlicher Naturgesetze und aller Initialbedingungen wie Lage, Position und Geschwindigkeit aller im Kosmos vorhandenen physikalischen Teilchen, jeden vergangenen und jeden zukünftigen Zustand zu berechnen und zu determinieren. Nach dieser Aussage wäre es theoretisch möglich, eine Weltformel aufzustellen.

Der Ausdruck stammt aus folgendem Zitat von Pierre-Simon Laplace im Vorwort des Essai philosophique sur les probabilités von 1814:

Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Universums als Folge eines früheren Zustandes ansehen und als Ursache des Zustandes, der danach kommt. Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt, mit denen die Welt begabt ist, und die gegenwärtige Lage der Gebilde, die sie zusammensetzen, und die überdies umfassend genug wäre, diese Kenntnisse der Analyse zu unterwerfen, würde in der gleichen Formel die Bewegungen der größten Himmelskörper und die des leichtesten Atoms einbegreifen. Nichts wäre für sie ungewiss, Zukunft und Vergangenheit lägen klar vor ihren Augen[1].

Laplacesche Dämon ist in der Praxis eigentlich eine sinnlose Fiktion. Man kann ihn sich so mächtig denken wie man will, es ist ihm unmöglich schon wegen des Beobachterproblems das Wissen zu erhalten, das er bräuchte, um die Zukunft zu berechnen.

3.3 Modelle vs. Versuche

Wir sind normalerweise der Meinung, Versuche liefern immer die realistischsten Ergebnisse. Schließlich zeige sich da die wahre, ungefilterte Natur! Genauer als Versuche ginge es nicht.

[1] Pierre-Simon Laplace: Essai philosophique sur les probabilités. Bachelier, Paris, 1814 - Vorwort

Das ist falsch!

Schon im Versuchsaufbau steckt eine Annahme über die Wirklichkeit!

Außerdem greift ein Versuch in der Realität i.a. immer in das zu messende Objekt ein (Beobachterproblem).

Beispiele:

- Die Strömung in einem Windkanal realisiert unsere Modellvorstellung über die Windstruktur (Profil, Turbulenz etc.), nicht etwa den realen Wind, der ist kaum modellierbar (Problem Temperaturschichtung etc.).
- Wasserbauliche Versuche können z.B, nicht immer die Wirklichkeit einfangen, da z.B. die Coriolis-Beschleunigung oder die Windwirkung nicht richtig erfasst werden können.

So haben Modellrechnungen über das Verhalten von Hochwasser im Elbe-Ästuar deutlich realitätsnähere Ergebnisse geliefert, als großmaßstäbliche Versuche im Franzius-Institut (LUB).

4. Beispiele für Modelle gemäß Definition in 3.1

4.1 Geländemodelle

In der Geodäsie wird seit Jahren mit sog. digitalen Gelände- oder Oberflächenmodellen gearbeitet. Das digitale Geländemodell (DGM) beschreibt die natürliche Erdoberfläche ohne die darauf befindlichen, künstlichen Objekten (Straßen, Häuser, Bebauung, etc), aber mit morphologischen Besonderheiten, wie z.B. Geländekanten, markante Höhenpunkte etc.

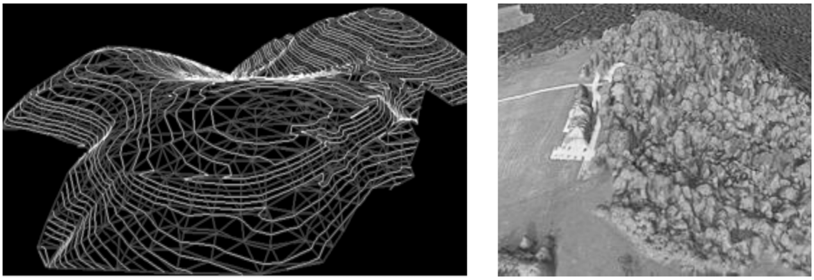
Das digitale Oberflächenmodell (DOM) beschreibt die natürliche Erdoberfläche, d.h. DGM zusätzlich mit den darauf befindlichen künstlichen Objekten (Straßen, Häuser, Bebauung, etc).

In Abbildung 4 sind zwei Beispiele gegeben.

4.2 Rechtsmodelle

Wenn man die in 3.1. gegebene Definition zugrunde legt, kann man Gesetze als Modelle der „Tat“ bezeichnen. Besonders deutlich wird dies im Strafrecht.

Das Modell (Gesetz) hat mit dem Original (Tat) mindestens eine Eigenschaft gemeinsam (z.B. Mord). Das Modell (Gesetz) muss dem Original bis zu einem gewissen Grad ähnlich sein, es soll die realen Sachverhalte zumindest approximativ wiedergeben. Dies tut ein Gesetz.



digitales Geländemodell digitales Oberflächenmodell

Abb. 4: Gelände- und Oberflächenmodell.

Beispiel § 211 StGb:

Mörder ist, wer aus Mordlust, zur Befriedigung des Geschlechtstriebs, aus Habgier oder sonst aus niedrigen Beweggründen, heimtückisch oder grausam oder mit gemeingefährlichen Mitteln oder um eine andere Straftat zu ermöglichen oder zu verdecken, einen Menschen tötet.

Ähnlich sein heißt hier z.B.: Wenn jemand jemanden ermordet hat, kann man ihn nicht wegen Sachbeschädigung anklagen. Insofern ist das Gesetz als Modell dem Original ähnlich.

Jede Modellbildung beinhaltet eine Abstraktion. Bei dieser Abstraktion gehen bestimmte Eigenschaften des Originals verloren, d.h. nicht alle Merkmale des Originals können auf das Modell übertragen werden. So können im Gesetz nicht alle Tatumstände exakt beschrieben werden, dies wird in allgemeinen, sog. unbestimmten Rechtsbegriffen[2] bewerkstelligt. Die Aufgabe des Gerichtes ist es, diese unbestimmten Rechtsbegriffe mit der Tat zu vergleichen.

Die Frage für den Richter ist also z.B.: War die Ausführung der Tat heimtückisch oder nicht. Was ist Heimtücke? Das entscheidet der Richter.

In jedem Modell müssen implizit Aussagen enthalten sein, welche die Beziehung des Bildes (= Modell) zu seinem Original regeln. Dies sind z.B. Anfangs- oder Randbedingungen. Auch diese Anfangs-und Randbedingungen sind die unbestimmten Rechtsbegriffe, mit denen die tatsächliche Tat den allgemeinen Regeln des Gesetzes angepasst wird.

[2] Der unbestimmte Rechtsbegriff bezeichnet im bundesdeutschen Recht ein Merkmal innerhalb der Tatbestandsseite einer gesetzlichen Bestimmung einer behördlichen Entscheidung oder einer sonstigen Rechtsquelle, bei dem ein Lexem vom Gesetzgeber mit einem vagen mehrdeutigen oder nicht abschließend aufgezählten Inhalt versehen wird und sich dessen objektiver Sinn nicht sofort erschließt.

4.3 Sprachmodelle

Die sog. Metapher können ebenfalls als Modelle im Sinne der Definition in Abs. 3.1 bezeichnet werden. Der Begriff kommt aus dem griech. von μεταφορεῖν übertragen, transportieren. Sie ist eine rhetorische Figur, bei der ein Wort in übertragener Bedeutung gebraucht wird, so dass zwischen der wörtlich bezeichneten Sache und der Metapher eine Ähnlichkeitsbeziehung herrscht (*Bedingung I für Modelle*).

Man verwendet Metapher, weil sich zwei Dinge aufgrund einer Eigenschaft ähnlich sind und diese Eigenschaft mit Hilfe der Metapher hervorgehoben wird. Zum Beispiel „das Gold der Wüste" für Wasser. Oder wenn ein Wort als zu anstößig oder negativ empfunden wird, mildert die Metapher den eigentlichen Ausdruck wie bei „von uns gehen" für sterben. Sie kommen ganz selbstverständlich im alltäglichen Gebrauch zum Einsatz, ohne dass uns dabei bewusst wird, eine Metapher zu verwenden. Wie z.B. „Flaschenhals". Dafür bräuchte man sonst eine lange Beschreibung des Sachverhaltes.

Jeder von uns verwendet täglich Metaphern. Wenn man „Stuhlbein" oder „kaputtlachen" sagt, dann hat man schon eine Metapher benutzt.

Beispiele:

- Alter ➔ Lebensabend — von uns gegangen ➔ gestorben
- Kamel ➔ Wüstenschiff — Handbedeckung ➔ Handschuh
- Wasser ➔ Gold der Wüste — Engstelle ➔ Flaschenhals

Die Metapher Computer-Virus hat ein Original (den schädlichen Computer-Code), gibt von diesem aber keine Details wieder. Die Metapher ist also ein Modell.

Beim Umgang mit Software sind Metaphern wichtig, weil nur sie einfach gestatten, all die Dinge, die sich unserer Vorstellung verweigern, durch Metaphern zu fassen: software, Sprung, Schleife, Absturz, Bug, Portal, Speicher, firewall etc. etc.

4.4 Ökonomische Modelle

Mit Hilfe ökonomischer Modelle sollen ökonomische Prozesse verstanden und ggf. prognostiziert werden. Dabei werden in der Regel die folgenden Annahmen getroffen, um die Vielzahl der Einflussparameter zu reduzieren (Abstraktion nach Abs. 3.1):

a) Es liegt ein homogener, vollkommender Markt vor

b) Der Marktteilnehmer ist der sog. homo oeconomicus, d.h. ein zeitunabhängiger, reiner Erwartungs-Nutzen Maximierer

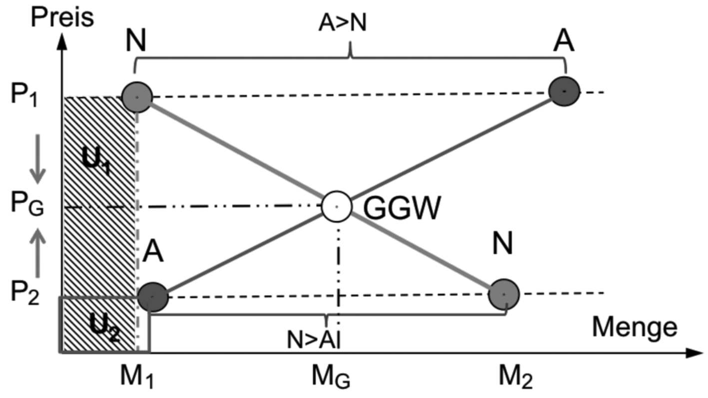


Abb. 5: Preisbildung mit Gleichgewichtspreis.

Diese Idealisierungen treffen allerdings meist nicht die komplexere Wirklichkeit, da viele beeinflussende Größen bewusst ausgeblendet werden. Dies sind z.B.:

a) persönliche, zeitliche, sachliche, räumliche Präferenzen, um z.B. bei einem bestimmten Supermarkt einzukaufen
b) Es liegt vollkommene Markttransparenz vor, der Teilnehmer weiß alles über den Markt
c) Homogenität der Güter, d.h. alle Güter sind qualitätsmäßig identisch, quasi genormt.
d) Sofortige Reaktion: Alle Marktteilnehmer reagieren sofort auf Änderungen der Marktvariablen.

Ein Markt, der unter diesen Voraussetzungen definiert wird, ist ein vollkommener Markt.

Im Modell des vollkommenen Marktes bilden sich Preise, und somit auch die Nachfrage nach Gütern, immer in Abhängigkeit von Angebot und Nachfrage. In der Spieltheorie werden die strategischen Interaktionen zwischen Menschen betrachtet. Hier muss der Handelnde nicht nur die ihm zur Verfügung stehenden Optionen kennen, sondern auch Erwartungen bezüglich des Verhaltens seines Gegenübers bilden. Dieses wiederum gründet sich auf dessen Erwartungen.

Beispiel: Preisbildungsmodell:

Grundidee ist die einer Auktion, bei der ein Preis ausgerufen sind und die Reaktionen drauf beobachtet werden [2].

Der Auktionator setzt einen (sehr hohen) Preis P_1 fest, Abbildung 5.

Bei sehr hohem Preis P_1 wird es nur wenige Nachfrager N geben, dafür aber viele Anbieter A, die zu diesem hohen Preis verkaufen möchten. Es herrscht starkes Ungleichgewicht.

Wenn der Auktionator zu dem Nachfragepreis P1 die Auktion schließt, würde er die Menge M1 verkaufen. Preis mal Menge ist Umsatz, d.h. die schraffierte Fläche ergibt den sich einstellenden Umsatz U1 an.

Ein großer Teil von (teuren) Anbieter kommt also nicht zum Zug.

Im nächsten Schritt senkt der Auktionator den Preis auf P2. Jetzt haben nur noch wenig Anbieter Interesse, aber sehr viele Nachfrager, zu diesem niedrigen Preis zu kaufen. Es herrscht wieder ein starkes Ungleichgewicht.

Wenn man dies für alle denkbaren Situationen durchspielte, würde sich für die Anbieter die Verbindungslinie A-A ergeben, für die Nachfrager die Verbindungslinie N-N. Im Schnittpunkt sind alle zufrieden, es hat sich ein Gleichgewichtspreis ergeben. Der Umsatz $P_G \times M_G$ ist der größte von allen.

4.5 Mechanische Modelle

Hierbei gehen wir aus von den Newtonschen Axiomen (Abbildung 6). Wir nutzen hierbei die Modelldefinition des Historischen Handbuchs der Philosophie, vgl. Abs. 2:

Modell heißt in der Logik ein System aus Bereichen und Begriffen, insofern es die Axiome einer passend formulierten Theorie erfüllt.

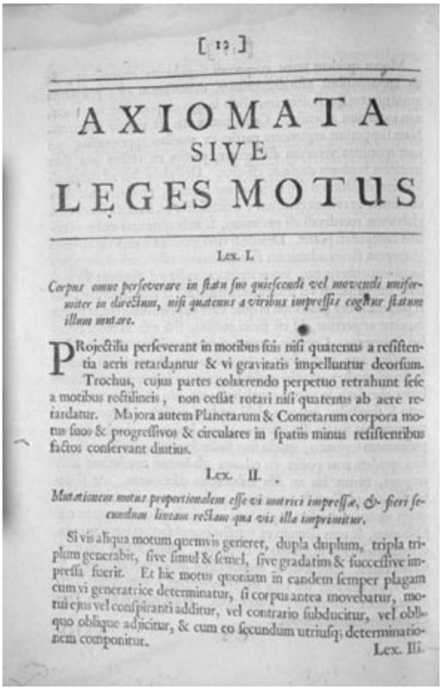
Die drei Newtonschen Axiome (oder Gesetze, siehe Abbildung 6) sind im Folgenden noch einmal dargestellt:

Lex prima: „Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Translation, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustandes gezwungen wird. **(Trägheitsprinzip)**

Lex secunda: „Die Änderung der Bewegung einer Masse ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt“. (**Beschleunigungsprinzip** wg. Änderung der Bewegung)

Lex Tertio: „Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio).“ (**Wechselwirkungsprinzip**: actio = reactio)

Das 3. Gesetz ist auch als Gleichgewichtsforderung bekannt. Man kann nur soviel Kraft aufbringen, wie die andere Seite (z.B. der Widerstand zulässt).



[12]

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinationem componitur.

Lex. III.

Abb. 6: Newtonsche Axiome.

Beispiel: „Ziehe nicht die Katze am Schwanz, meine Süße“ ruft die Mutter (Abbildung 7a). „Ich ziehe nicht, Pussy zieht“ [2]. Das ist Gleichgewicht.

In Abbildung 7b zieht das Mädchen an einem Seil, das an einer Mauer befestigt ist, die Mauer verformt sich wie eine Feder und zieht mit der Federkraft am Seil zurück. Wenn die Mauer zusammenbricht, ist es nicht mehr möglich eine Kraft aufzubringen.

Die drei Newtonschen Axiome sind das Fundament der Mechanik, d.h. der Statik, der Dynamik, der Festigkeitshypothesen, der Planetenbewegungen usw.

Beispiel: Grundgleichung der Dynamik:

Gegeben sei eine bewegliche Masse, die durch Feder und Dämpfer gestützt ist (Abbildung 8):

Die von außen angreifende, zeitabhängige Kraft $F(t)$ muss im Gleichgewicht stehen mit den Kräften auf „der anderen Seite“, d.h. es gilt:

$$F(t) = F_M + F_D + F_K$$

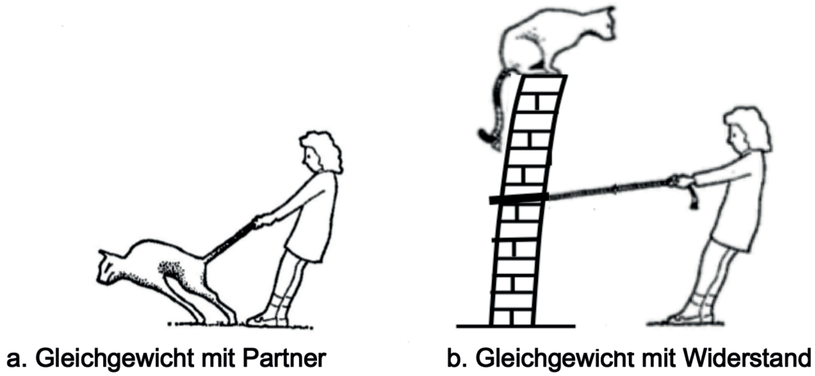


Abb. 7: Gleichgewichtssituationen [2]

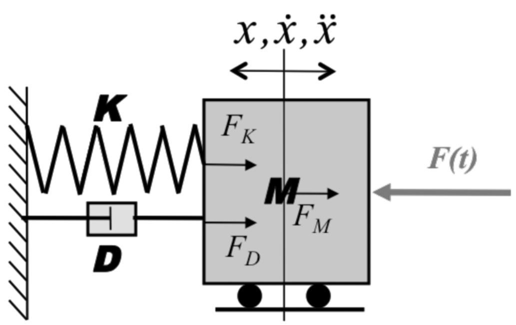


Abb. 8: Einmassenschwinger.

Die einzelnen Kräfte können in Abhängigkeit des Bewegungszustandes bestimmt werden:

$F_K = K \cdot x$ *(Hookesches Gesetz, 3. Axiom)*
$F_D = D \cdot v = D \cdot \dot{x}$ *(Dämfungskraft ist Geschwindingkeit*
$Fm = M \cdot b = M \cdot \ddot{x}$ *(Trägheitsgesetz, 2. Axiom)*

Eingesetzt in die o.a. Gleichgewichtsbedingung, folgt:

$$\mathrm{M} \cdot \ddot{x} + D \cdot \dot{x} + K \cdot x = F(t)$$

Das Ergebnis ist eine Differentialgleichung. Gesucht ist die Bewegungsgröße ×, die zusammen mit ihrer ersten und zweiten Ableitung die Differentialgleichung erfüllt.

Dies ist das mathematische Modell für die Schwingung der Masse aus Abbildung 8, da es die Axiome der Theorie erfüllt.

5. Wie erstellt man Modelle?

5.1 Allgemeines

In der Regel werden Experimente oder Beobachtungen gemacht, dabei werden Abhängigkeiten entdeckt. Diese sollen mit Modellen beschrieben (und ggf. erklärt) werden.

Dazu sagt Leonardo da Vinci:

Experimentiere, denn mit Experimenten stellt man gute Regeln auf!

Oder auch:

Meine Absicht ist es, erst die Erfahrung anzuführen und sodann mit Vernunft zu beweisen, warum diese Erfahrungen auf solche Weise wirken muss.

Aber man bedenke: Versuche sind nicht alles, vgl. Abs.3.3. Vieles können Sie nicht nachbilden oder ersetzen. Modelle sind wichtig, um den richtigen Weg zu sehen und die Ergebnisse richtig einzuordnen, wie die beiden lateinischen Zitate deutlich machen:

Theoria sine praxi est currus sine axi,

Praxis sine theoria est currus sine via.

Oder, wie Leonardo da Vinci bemerkt: Diejenigen, die sich für Praxis ohne Theorie begeistern, sind wie Seeleute, die ein Schiff ohne Kompass und Steuerruder betreten und niemals wissen, wo sie ankommen.

Modellbildung ausgehend von Beobachtungen:

Die Modellbildung ausgehend von Messdaten, soll hier am Beispiel der Himmelsmechanik dargestellt werden (Abbildung 9):

- Ordnen: Sternbilder zum Ordnen und Sortieren
- Beobachtungsdaten sammeln
  Brahe (1546-1601): sorgfältige Daten über Planetenbewegungen
- Auswerten
  Kepler(1571-1630): Keplerschen Gesetze
- Verstehen des übergeordneten Prinzips
  Newton(1643-1727): Newton'schen Gesetze (leges motus)
- Verallgemeinern
  Einstein (1879-1955): Verallgemeinerte Relativitätstheorie (Feld ist der Raum)
- Prognose
  Unabhängige Beobachtungen

Erst durch die Anwendung der allgemeinen Relativitätstheorie wurde die Himmelsmechanik widerspruchsfrei. So konnte überraschende Bewegungen des

Abb. 9: Sternenhimmel.

sonnennächsten Planeten Merkur erklärt werden, Vorher hatte man dafür einen noch nicht beobachteten inneren Planeten, dem man den Namen Vulcanus gegeben hatte, verantwortlich gemacht. Die Anwendung der allgemeinen Relativitätstheorie erklärte diese Änderung durch die Raumkrümmung in der Nähe der großen Sonnenmasse.

Da man i.a. nicht alle Effekte in gemeinsam erfassen kann, geht man bei der Modellbildung komplexer Phänomene sinnvoll wie folgt vor:

- Ordnen: der meist großen Zahl von Messergebnissen
- Abgrenzung: Nichtberücksichtigung irrelevanter Objekte
- Reduktion: Weglassen von Objektdetails
- Dekomposition: Zerlegung, Auflösung in einzelne Segmente
- Aggregation: Vereinigung von Segmenten zu einem Ganzen
- Abstraktion: Begriffs- bzw. Klassenbildung

5.2 Dekomposition – Reduzierbarkeit

Insbesondere die Dekomposition – also die Zerlegung eines komplexen Systems in Einzelphänomene – ist ein gern gewähltes Mittel, um die Komplexität eines Systems zu reduzieren. Auf die damit zusammenhängenden Fragestellungen wurde in Abs. 3.2.2 Reduzierbarkeit bereits kurz eingegangen.

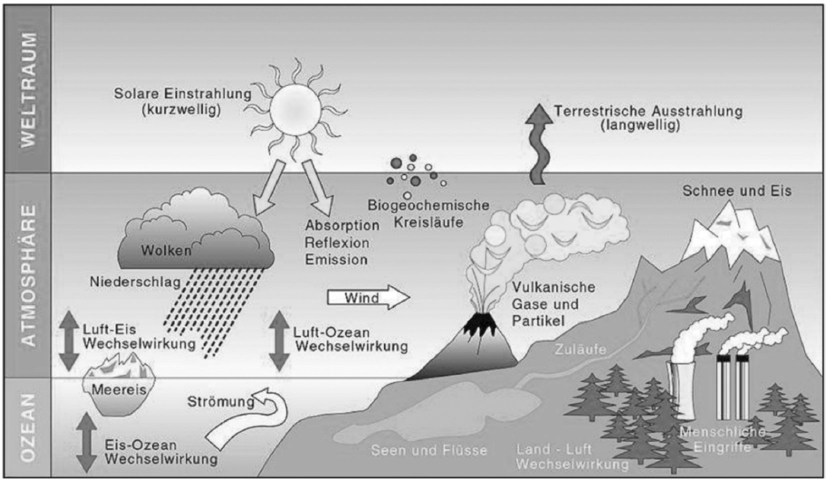


Abb. 10: Klimamodell mit Teilmodellen [4].

Beim Zerlegen großer Modelle in kleinere Untermodelle treten oft Probleme auf, da es Rückkopplungen und damit Nichtlinearitäten gibt, die oft übersehen werden, oder die nicht hinreichend genau modelliert werden können. Alle Teilprozesse werden durch Einzelmodelle beschrieben. Diese Probleme hat schon Goethe in der Schülerszene im Faust I dargestellt: Mephisto deklamiert:

Wer will was lebendig's erkennen und beschreiben
Sucht erst den Geist herauszutreiben
Dann hat er die Theile in der Hand
Fehlt leider nur das geistige Band,
Encheiresin naturae nennt's die Chimie,
Spottet ihrer selbst und weiß nicht wie.

Modelle, die u.a. deswegen in der Kritik stehen, sind die schon eingangs erwähnten Klimamodelle (Abbildung 10):

So ist z.B. die Frage der Wolkenbildung unklar, obwohl diese naturgemäß einen starken Einfluss auf das Klima haben. Neue Ergebnisse scheinen darauf hinzudeuten, dass es einen Zusammenhang mit der Sonnenaktivität gibt. Dies ist in den Modellen, mit denen heute prognostiziert wird, nicht enthalten. Französische Mathematiker haben sich die numerischen Modelle einmal vorgenommen [5]. Ergebnis: Unabhängig mit welchen Daten man sie füttert (auch Börsendaten wurden verwendet) es kommt immer die bekannte sog. Hockey Stick-Kurve von Mann für die Abhängigkeit der Temperatur vom CO_2-Gehalt der Atmosphäre heraus. Sehr vage sind auch die Austauschmodelle im Abbildung 10 als Wechselwirkung

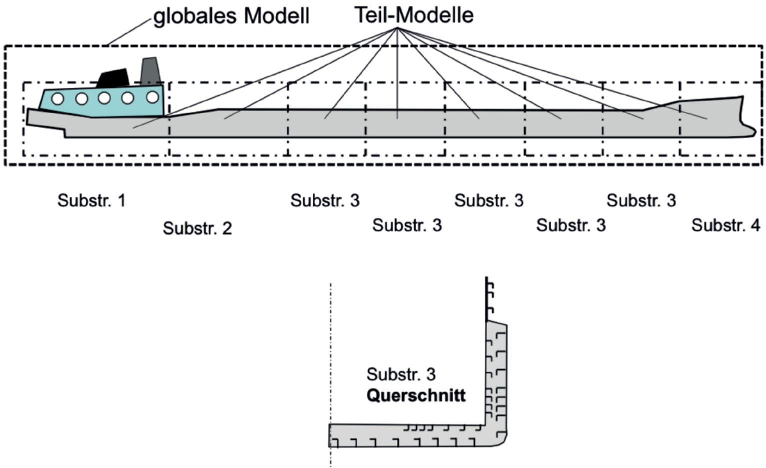


Abb. 11: Zerlegung in Substrukturen.

bezeichnet. So verwundert es nicht, dass die Ergebnisse der letzten 25 Jahre, die – trotz stetig steigendem CO2-Gehalt – keinen Temperaturanstieg zeigten, die Klimamodelle, die ein ganz anderes Verhalten aufzeigten, ad absurdum geführt haben.

5.3 Substruktur-Technik

Die Analyse großer und komplizierter Strukturen mit Hilfe der Finite-Element-Methode führt in der Regel auf sehr große Gleichungsystem mit z.T. mehrere Millionen Unbekannten. Solche Berechnungen sind dann sehr kostenintensiv, wenn sie überhaupt möglich sind. Bei großen technischen Systemen wird oder wurde deshalb gern die sog. Substruktur-Technik angewendet, um die Größe des Problems, insbesondere des entstehenden Gleichungsystems stark zu reduzieren. Hierbei sind zwei Wege zu unterscheiden:

I. Zerlegung in Unterbestandteile, die unter einer Einheitseinwirkung für sich allein betrachtet wurden. Die Einzelteile wurden anschließend über die Koppelbedingungen zusammengefügt.
II. Kondensation der Matrizen und Reduzierung von (sog. innere) Freiheitsgraden der Dimension. Das ursprünglich sehr große System wird dann auf einige Freiheitsgrade (die sog. externen) kondensiert.

Zunächst sollen die Prinzipien des Verfahrens I vorgestellt werden.

In dem Beispiel in Abbildung 11 sind die inneren Bereiche, die mit Substr. 3 (=Substruktur 3) gekennzeichnet sind, identisch. Es lohnt sich also, diese vorab

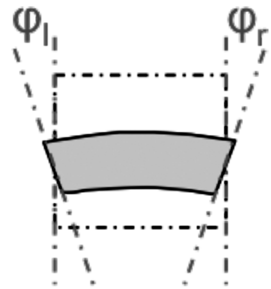


Abb. 12: Substruktur mit eingeprägten Randwinkeln.

nur einmal zu berechnen und diese anschließend zusammen mit den anderen Teilmodellen zum globalen Modell zusammen zu setzen.

Hierzu werden dem Teilmodell an beiden Längsrändern definierte Winkel φ_r, φ_r eingeprägt (Abbildung 12). Die sich dabei ergebenden inneren Schnittgrößen, Spannungen etc. werden ermittelt und gespeichert. Aus der Randspannungsverteilung lässt sich ein Schnittmoment ermitteln. Mit den beiden Größen Randwinkel φ und Schnittmoment – die für jedes Teilmodell vorab getrennt bestimmt werden – lässt sich dann die Schiffsbeanspruchung zunächst in Bezug auf die Unbekannten bestimmen. Im Anschluss lassen sich dann die lokalen Dehnungen und Spannungen am Submodell rückrechnen.

Schlussendlich muss natürlich insgesamt die gesamte Anzahl von Unbekannten gelöst werden, nur kann diese Aufgabe durch die hier kurz vorgestellte Technik hintereinander, also nicht gleichzeitig erledigt werden. Und das mit wesentlich kleineren Matrizen für die einzelnen Teilmodelle.

6. Typisierung der unterschiedlichen Modelltypen

6.1 Überblick

Es werden unterschieden: **parametrische und nichtparametrische** Modelle.

Ein **parametrisches Modell** enhält eine zugrundeliegende Theorie, deren Parameter als Eingang dienen.

Beispiel: Nach Abs. 4.5 gehorcht ein Schwingungsmodell der Differentialgleichung: $M \cdot \ddot{x} + D \cdot \dot{x} + K \cdot x = F(t)$. Die Parameter M, D, K und F(t) sind zu bestimmen. Da klar ist, was im Modell passiert, da alle Abhängigkeiten offen liegen, nennt man die Modelle auch **White Box Modelle** (Abbildung 13).

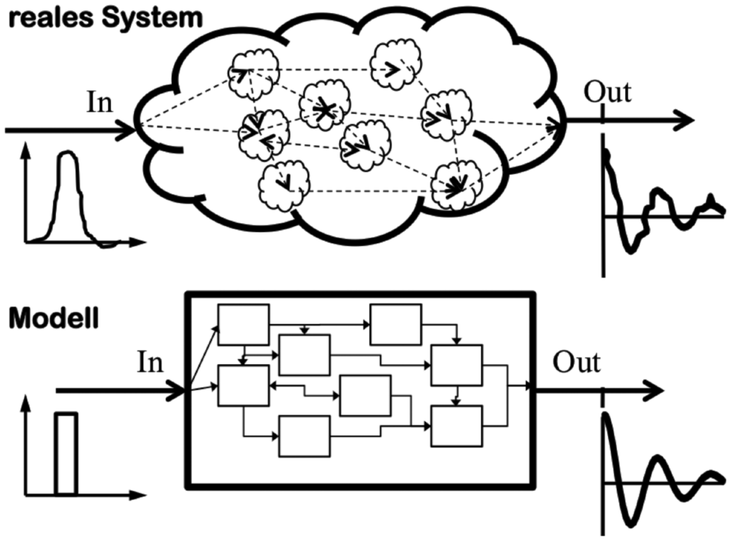


Abb. 13: Übersicht Arbeitsweise eines White-Box-Modells.

Hierzu stehen im Gegensatz die sog. **Black Box Modelle**, oder auch **nichtparametrische Modelle**. Diese beruht nicht auf einer zugrundeliegenden Theorie, sondern beschreiben die empirisch oder aus Messungen erhaltenen Ergebnisse (Black-Box Modell), Abbildung 14.

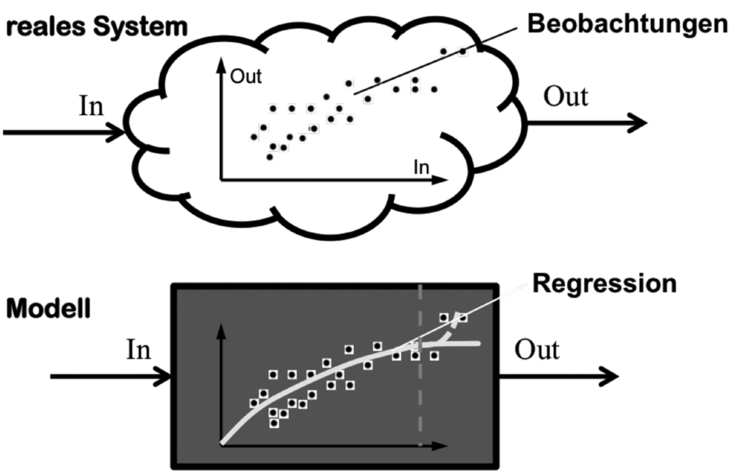


Abb. 14: Übersicht Arbeitsweise Black-Box-Modell.

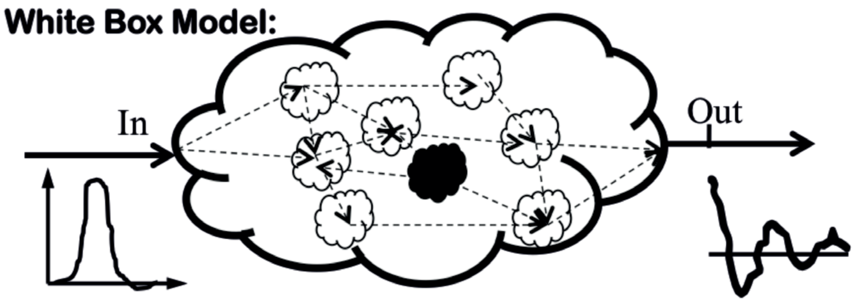


Abb. 15: Übersicht Arbeitsweise eines Gray-Box-Modells.

Man erkennt, dass die Verknüpfungen im Modell sich der Verknüpfung in der Wirklichkeit anpassen. In den einzelnen Kästen des unteren Modells in Abbildung 13 stehen Formeln und Ähnliches. Die Black-Box-Modelle in Abbildung 15 enthalten keine Differentialgleichungen, bzw. deren Lösungen, sondern Messergebnisse oder andere empirische Ergebnisse.

Hier werden also die Beobachtungsdaten ohne Verständnis der inneren Abhängigkeiten verwendet. Warum ist die Kurve so gekrümmt und nicht anders?

Wichtig ist hierbei, dass die Modelle – anders als die white-box-Modelle, die ja auf einer Theorie beruhen – nur innerhalb der durch den Versuch abgedeckten Grenzen gültig sind (hier: gestrichelte Begrenzungslinie). Eine Nutzung darüber hinaus kann zu schwersten Fehlern führen, weil dies nicht abgesichert ist.

Gelegentlich werden aus Gründen der einfacheren Vorgehensweise die Prinzipien der White Box und der Black Box Modelle gemischt. Man spricht dann von sog. Gray Box Modellen. Zum Beispiel dann, wenn Teile der Modellbildung schwierig oder auch sehr aufwendig sind, Abbildung 15.

Diese Vorgehensweise soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Zur Reduktion der Schwingungen eines kreiszylindrischen Kamins, soll ein Flüssigkeitsdämpfer eingesetzt werden. Wie groß sind seine Dämpfungswerte bei der dynamischen Berechnung anzusetzen?

Das mechanische Modell des schwingenden Kamins lässt sich gut durch die abgeleitete Schwingungsdifferentialgleichung beschreiben. Unbekannt sind darin allerdings die Dämpfungswerte des hier gewünschten Flüssigkeitsdämpfers, Abbildung 16.

Vereinfacht, aber mit guter Näherung, lässt sich der Kamin durch einen Einmassen-Schwinger darstellen, so dass zusammen mit dem Dämpfer ein Zweimassenschwinger entsteht, Abbildung 17 [6].

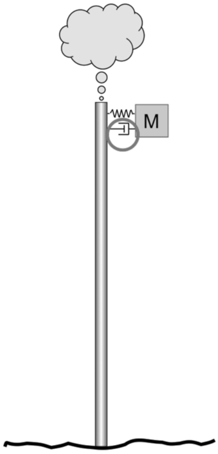


Abb. 16: Kamin mit Dämpfer.

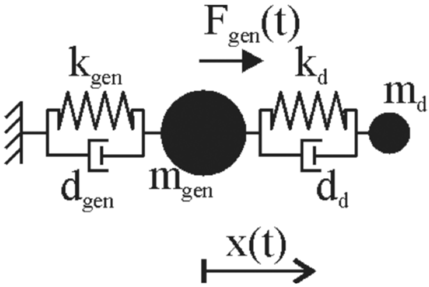


Abb. 17: Kamin als Zweimassenschwinger.

Die Dämpferwerte sollen versuchsmäßig bestimmt werden. Der Aufbau ist in Abbildung 18 dargestellt

Ein Plexiglas-Kasten gefüllt mit Wasser wird praktisch reibungsfrei auf Schienen gelagert. Er wird verschieblich bewegt, angetrieben von einer hydraulischen Presse. Der Weg wird geregelt vorgegeben, die dabei auftretenden Kräfte werden gemessen. Gemessen werden die Zylinderkraft, der Verschiebeweg und die Dehnungen eines Dehnungsmessstreifens auf der Rückwand. Dieser soll die an die Wand klatschenden Wellen identifizieren. In Abbildung 19 sind die Rohmessdaten dargestellt.

Man erkennt, dass der Verschiebeweg einer sauberen Sinusfunktion folgt. Dies ergibt sich aus dem Weg als Regelgröße. In der zweiten Diagrammzeile ist die Rückwanddehnung dargestellt. Deutlich sind hier die Impulse durch an anklatschende Wellen zu sehen. Die dritte Diagrammzeile zeigt die Kraft, die benötigt wird, um den sinusförmigen Weg zu erzwingen. Hier sind noch zusätzliche Oberwellen zu erkennen, vermutlich durch die sensible Regelung im Bereich der Extremwerte der Sinusfunktion. Diese höherfrequenten Schwingungen sind für das Dämpfungsverhalten irrelevant. Sie werden mit einem Tiefpassfilter 5. Ordnung mit Butterworth-Charakteristik und einer Grenzfrequenz (-3dB) von 5 Hz herausgefiltert.

Ein Vergleich der Versuchsdaten mit den angepassten Modelldaten zeigt Abbildung 20. Man erkennt, dass das Verhalten recht gut beschrieben wird. Die Spitzen

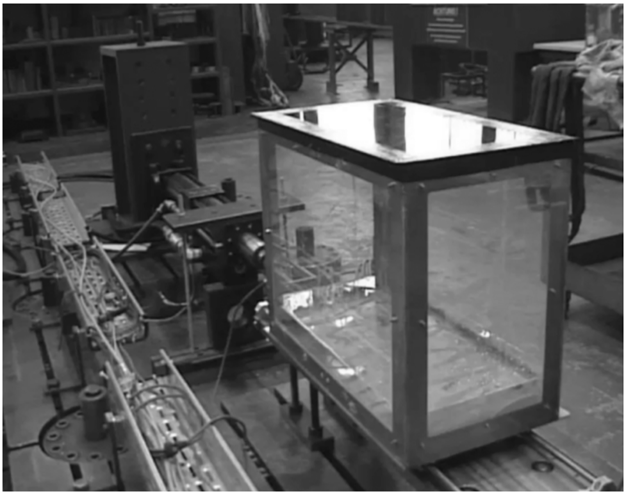


Abb. 18: Versuchsaufbau zur Messung der Dämpfercharakteristik.

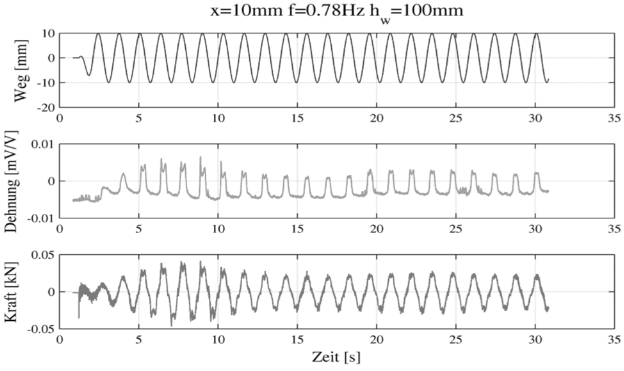


Abb. 19: Rohmessdaten.

werden noch nicht ganz sauber erreicht. Im stationären Bereich sind die Modellkräfte etwas größer, d.h. die Dämpfung wird überschätzt. Der Ansatz liegt also auf sicherer Seite. Zur Beurteilung der Dämpferwerte reicht es allemal.

Die Dämpferwerte wurden für viele unterschiedliche Konfigurationen bestimmt. Insgesamt gab es 4 Einflussgrößen. Die Ergebnisse sind als Punkte in Bild 21 – für die im Kopf des Diagramms angegebenen Parameter – dargestellt:

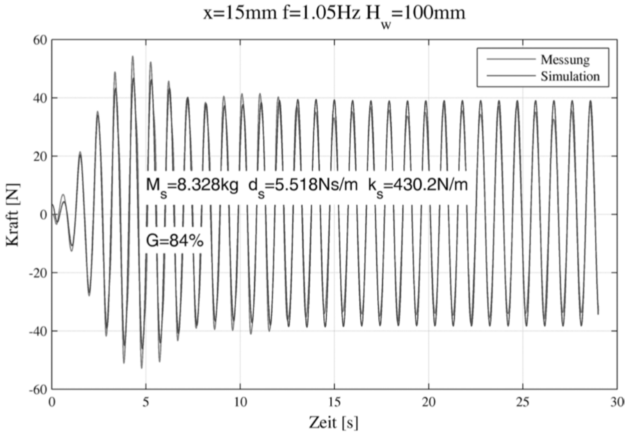


Abb. 20: Vergleich Versuch und angepasstes Modell.

Die Diagramme wurden mit Hilfe einer Polynomfunktion mathematisch beschrieben:

$$\frac{f_d}{f_{d,Hou}}\left(y_{rel}, f_{x,rel}, \frac{1}{\lambda}, L\right) = \sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{4}\sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} p_{ijkl} \cdot y_{rel}^{i} \cdot f_{x,rel}^{j} \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{k} \cdot L^{l}$$

Die Funktionswerte sind als Fläche in Abbildung 21 dargestellt. Man erkennt, dass die blauen Messwerte gut angepasst sind.

Das Ergebnis wurde anschließend in ein EXCEL-Berechnungsprogramm integriert, so dass der Anwender nunmehr einfach Kamine mit einem adäquaten Flüssigkeitsdämpfer versehen kann Abbildung 22.

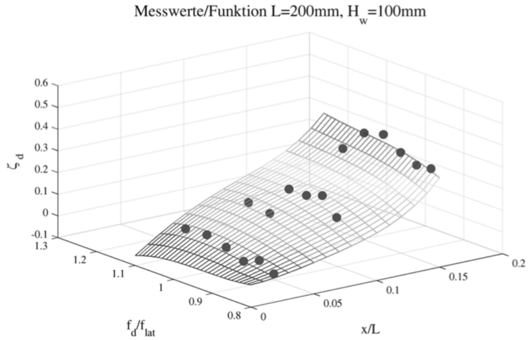


Abb. 21: Darstellung für definierte Parameter.

Bauvorhaben:	**Testbeispiel**	Datum:	06.12.2011

Dimensionierung Schwingungsdämpfer

[grau] = Eingabe erforderlich

Wirbelablösung

Durchmesser Schornstein		$D =$	1,016	m
Strouhal-Zahl		$St =$	0,20	
Erregerkraftbeiwert		$c_{lat} =$	0,2	
bezogene Wirklänge		$L_w/D =$	6,3	

Hauptsystem

Grundfrequenz Schornstein		$f_{gen} =$	1,05	Hz
generalisierte Masse		$m_{gen} =$	1090	kg
generalisierte Steifigkeit		$k_{gen} =$	47442	N/m
log. Dekrement Schornstein		$\delta =$	0,012	
Totmasse Dämpfer		$m_{tot} =$	78	kg
Masse Hauptsystem		$m_H =$	1168	kg
Lehrsches Dämpfungsmaß Hauptsystem		$\zeta_H =$	0,19%	
Grundfrequenz Hauptsystem mit Totmasse		$f_H =$	1,01	Hz
Querschwingungsamplitude (Zielwert)		$y_{lat,Ziel} =$	13,0	mm
Querschwingungsamplitude (Istwert)		$y_{lat,max} =$	13,0	mm
Erregerfrequenz (Querschwingungsfrequenz)		$f_{lat} =$	1,05	Hz

Dämpfer

Verstimmung	$0{,}95 < \kappa < 1{,}0$	$\kappa =$	0,965	
Beckenlänge	$150 < L < 800$	$L =$	480	mm
relative Amplitude		$y_{lat}/L =$	0,03	$\leq 0{,}15$
Beckenbreite		$b =$	200	mm
Füllhöhe	$80 < H_w < 150$	$h_w =$	100	mm
Dämpferschlankheit		$L/h_w =$	4,8	
Anzahl Becken		$n =$	4	Stk
Dämpferfrequenz nach HOUSNER		$f_{d,H} =$	0,967	Hz
Dämpfermasse nach HOUSNER		$m_{d,H} =$	28,0	kg
Konstruktionsgewicht Dämpfer		$m_K =$	40	kg
Steifigkeit Dämpfer		$k_d =$	1060	N/m
Grundfrequenz Dämpfer		$f_d =$	0,979	Hz
Massenverhältnis		$\mu =$	0,024	
relative Erregerfrequenz	$0{,}8 < f_{d,H}/f_{lat} < 1{,}1$	$f_{d,H}/f_{lat} =$	0,921	
Teilsicherheitsbeiwert		$\gamma_{sys,d} =$	1,5	
Lehrsches Dämpfungsmaß Dämpfer		$\zeta_d =$	2,6%	<20%

Seite: 1

Abb 22: EXCEL-Sheet zur dynamischen Kamin-Berechnung.

7. Literatur

[1] Historisches Wörterbuch der Philosophie. Hrsg. J. Ritter 1971: Wissenschaftliche Buch-gesellschaft, Darmstadt.

[2] Cezanne,W. 2005: Allgemeine Volkswirtschaftslehre. 6. Auflage. Oldenbourg, München/Wien.

[3] Gordon, J.E. 1978: Structures. Penguin books London.

[4] Cubasch, U. & D. Kasang 2000: Anthropgener Klimawandel. Klett, Hamburg.

[5] Rittaud, B. 2010.6: Le mythe climatique. Seuil, Science ouverte.

[6] Peil,U. 1993: Baudynamik. – Stahlbau-Handbuch Band 1, Teil A. Stahlbau-Verlagsgesellschaft mbH, Köln.